

Pratique Supplémentaire 4

Cette série fait suite aux chapitres 1.9, 2.1, 2.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes

a) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{T} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{T} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{T} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe Oz et d'angle 60° (dans le sens trigonométrique).

Exercice 2

Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes :

- a) $f(x, y) = (2x - 4y, 6x + y)$,
- b) rotation ρ d'angle θ dans le sens positif,
- c) symétrie σ par rapport à la droite $y = x$.

Exercice 3

Calculer la matrice associée à chacune des applications linéaires suivantes et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives :

- a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y) = (2y, 3x)$
- b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y) = (5x - y, 0)$
- c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$
- d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x, y) = (y, x, x - y)$
- e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$

f) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$

Exercice 4

a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x - 3y + 4z, x - 5z, 2y + 6z)$$

b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.

c) Déterminer ensuite tous les vecteurs (x, y, z) tels que $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Exercice 5

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Si la matrice échelonnée-réduite associée à un système d'équations linéaires homogènes à m équations et n inconnues possède r pivots, alors le système a $n - r$ variables libres.
- b) Si un système d'équations linéaires homogènes possède plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.
- c) Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 , alors \vec{w} est une combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} .
- d) Si le vecteur \vec{v}_4 est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 , alors le vecteur \vec{v}_1 est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{v}_2 , \vec{v}_3 et \vec{v}_4 .

Exercice 6

Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- la première,
 la deuxième,
 la troisième,
 la quatrième.

Exercice 7

Soit $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ avec

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

Le span ne contient aucun vecteur de \mathbb{R}^4 .

Le span contient tous les vecteurs de \mathbb{R}^4 .

Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est dans le span.

Le span contient une infinité de vecteurs de \mathbb{R}^4 .

Exercice 8

L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x - 5y + 7z, 3x - y - 2z, y + 3z)$$

est injective mais pas surjective

est bijective

est surjective mais pas injective

n'est ni surjective ni injective

Exercice 9

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer AC , BC et CB .

Exercice 10

On se donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si elles sont définies, calculer les matrices :

$$AB, CA, CD, DC, A^T A, AA^T.$$

Si elles ne sont pas définies, expliquer pourquoi.

Exercice 11

On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 .

- Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
- Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
- Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.

d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a), b) et c).

Exercice 12

Ceci est un autre exercice de base concernant les produits matriciels, pour nous assurer que la différence entre $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{u} \vec{v}^T$ est bien claire.

On peut considérer tout vecteur de \mathbb{R}^n comme une matrice de dimension $n \times 1$. Soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\vec{u}^T \vec{v}$ produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

- Ecrire \vec{u}^T et \vec{v}^T .
- Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{v}^T \vec{u}$?
- Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit $\vec{u} \vec{v}^T$ est appelé produit extérieur.

- Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u} \vec{v}^T$ et $\vec{v} \vec{u}^T$?
- Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Exercice 13

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, José Luis Zuleta, . . .). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.